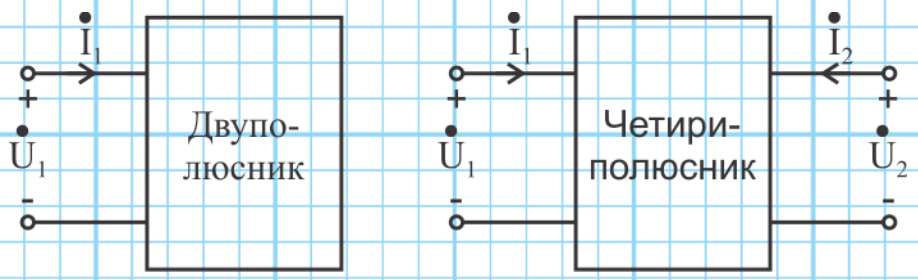
Четириполюсници

Четириполюсници

Първични параметри на четириполюсниците

Двойка изводи (полюси) на дадена електрическа верига могат да бъдат неин вход или изход. Когато дадена електрическа верига има само 1 вход/изход, тя се нарича двуполюсник, а когато има два – четириполюсник. Основните електрически елементи, които разглеждахме до сега (резистори, бобини, кондензатори и източници) са двуполюсни елементи. В общия случай една електрическа верига може да има n на брой входове/изходи.



Нека да разгледаме по-подробно един четириполюсник. Той може да се дефинира условно, като електрическа верига с 1 вход и 1 изход. Това че разглеждаме електрическата верига като четириполюсник, ни позволява да я третираме като „черна кутия“, която е част от някаква по-голяма верига. Теорията на четириполюсниците намира голямо приложение в комуникационните системи, електрическите системи, електрониката и др.

Четириполюсникът се характеризира с 4 основни величини, наричани първични параметри: неговите входни и изходни

токове и напрежения $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Нека даден четириполюсник е захранен с източник $\dot{U}_1$, и натоварен с товар Z_T:

Това ни позволява да дефинираме неговите предавателни параметри и съпротивления:

- Входно съпротивление:

$$Z_{\text{ВХ}} = \dot{U}_1/\dot{I}_1$$

- Изходно съпротивление:

$$Z_{\text{ИЗХ}} = \dot{U}_2/\dot{I}_2$$

Изходното съпротивление също така може да се разглежда като съпротивление на еквивалентния генератор, гледано от към товара.

- Коефициент на предаване по ток:

$$\dot{k}_I = \dot{I}_2/\dot{I}_1$$

- Коефициент на предаване по напрежение:

$$\dot{k}_U = \dot{U}_2/\dot{U}_1$$

Според структурата си, четириполюсниците могат да се класифицират като:

- Пасивни – не съдържат източници на ток/ЕДН или ако съдържат те взаимно се компенсират – например филтър, трансформатор, атенюатор и т.н.;
- Активни – съдържат източници на ток/ЕДН – например транзисторна схема, инвертиращ операционен усилвател и т.н.

Според това дали входът и изходът са равнопоставени, четириполюсниците биват:

- Симетрични – входът и изходът са взаимнозаменяеми.
- Несиметрични – входът и изходът не са взаимнозаменяеми.

Според това дали имат равни взаимни съпротивления/ проводимости (ще бъде обяснено след малко), четириполюсниците биват:

- Взаимни – четириполюсникът се характеризира с три независими параметъра и съдържа единствено резистори, бобини и кондензатори.
- Невзаимни – четириполюсникът се характеризира с четири независими параметъра и може да съдържа освен пасивни елементи и източници.

Параметри и еквивалентни заместващи схеми на четириполюсници

Между първичните параметри на четириполюсниците съществува функционална зависимост:

$$f\left(\dot{U}_1,\dot{I}_1,\dot{U}_2,\dot{I}_2\right)=0$$

За всеки линеен четириполюсник връзката между между $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ може да се даде със системи уравнения, като се използват Z, Y, H, G, A и B параметри.

Z параметри на четириполюсник (импедансни параметри)

Нека даден четириполюсник се захранва от два източника на ток $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$:

Тъй като четириполюсникът е линеен, можем да приложим принципа на наслагването (теоремата за суперпозицията) и да определим напреженията $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ като сума от въздействията на двата източника $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$:

$$\left|\begin{array}{l}\dot{U}_1=Z_{11}\dot{I}_1+Z_{12}\dot{I}_2\\ \dot{U}_2=Z_{21}\dot{I}_1+Z_{22}\dot{I}_2\end{array}\right.$$

Можем да запишем уравнението и в матрична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

където матрицата $Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$ съдържа Z-параметрите, измервани в Омове.

Четириполюсникът е симетричен ако $Z_{11} = Z_{22}$, а при $Z_{12} = Z_{21}$, четириполюсникът е взаимен.

Определяне на Z-параметрите

Z-параметрите могат да бъдат определени по следния начин. Нека първо да приемем, че четириполюсникът е захранен от източник на напрежение $\dot{U}_1$, а изходът му е отворен (празен ход):

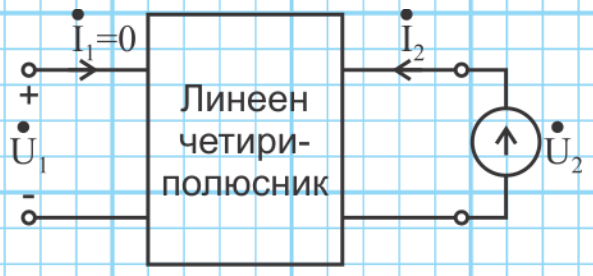
Това означава, че изходния ток е $\dot{I}_2 = 0$, при което системата с уравнения добива следния вид:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = Z_{11}\dot{I}_1 + 0 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + 0 \end{array} \right.$$

От тук можем да определим Z_{11} и Z_{21}:

$$Z_{11} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2 = 0} \qquad Z_{21} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2 = 0}$$

Сега ще разгледаме схема, при която четириполюсникът е захранен от към изхода си, а входът му е отворен:



Тъй като $\dot{I}_1 = 0$, системата добива следния вид:

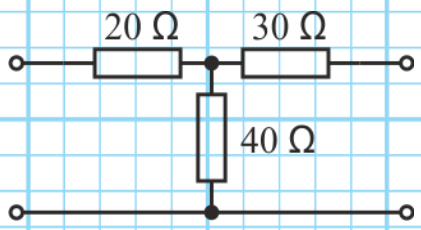
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = 0 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

От тук можем да определим Z_{12} и Z_{22}:

$$Z_{12} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1 = 0} \qquad Z_{22} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1 = 0}$$

Посочената последоватленост от действия представлява методика за определяне на Z параметрите на четириполюсник.

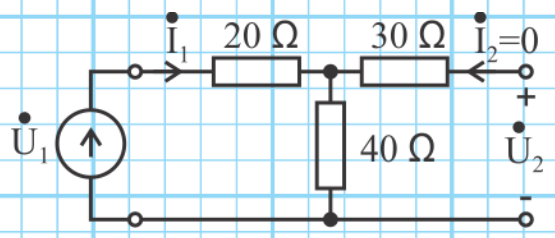
Пример: Да се определят Z параметрите на четириполюсника.



Решение: Системата със Z параметрите е:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

Ще анализираме системата за две ситуации: при $\dot{I}_2 = 0$ и при $\dot{I}_1 = 0$. Първо ще свържем източник на напрежение $\dot{U}_1$ към входа на веригата, и ще оставим изхода разкачен (на празен ход):



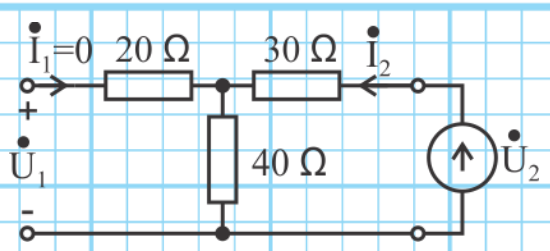
Първото и второто уравнения стават:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + 0 \rightarrow Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1}{20+40}} = 60\ [\Omega]$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + 0 \rightarrow Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{40\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = 40\ [\Omega]$$

Забележка: За удобство бихме могли и да дадем някаква стойност на $\dot{U}_1$. Например $\dot{U}_1 = 1\ [V]$.

За да определим другите два параметъра, ще свържем източник $\dot{U}_2$ към изхода на веригата, а входът ще оставим отворен:



Уравненията от системата с Z параметрите стават:

$$\dot{U}_1 = Z_{12}\dot{I}_2 \rightarrow Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \frac{40\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = 40\ [\Omega]$$

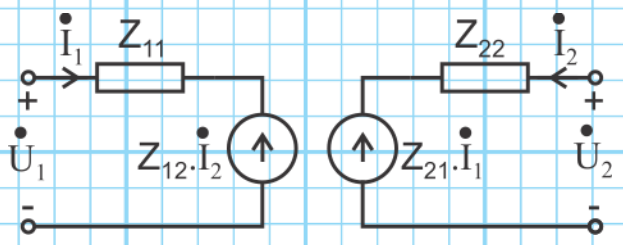
$$\dot{U}_2 = Z_{22}\dot{I}_2 \rightarrow Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_2}{\frac{\dot{U}_2}{30+40}} = 70\ [\Omega]$$

Следоватлено Z параметрите на четириполюсника са:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 60\ [\Omega] & 40\ [\Omega] \\ 40\ [\Omega] & 70\ [\Omega] \end{vmatrix}$$

Заместваща схема със Z- параметри

Нека да разгледаме следната схема:



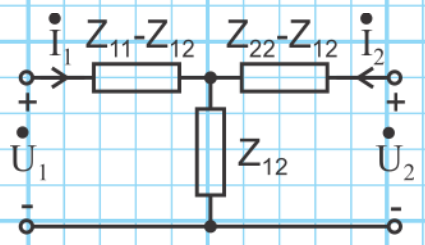
За нея можем да запишем две уравнения по ВЗК:

$$\dot{U}_1 - Z_{12}.\dot{I}_2 = Z_{11}.\dot{I}_1 \rightarrow \dot{U}_1 = Z_{11}.\dot{I}_1 + Z_{12}.\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 - Z_{21}.\dot{I}_1 = Z_{22}.\dot{I}_2 \rightarrow \dot{U}_2 = Z_{21}.\dot{I}_1 + Z_{22}.\dot{I}_2$$

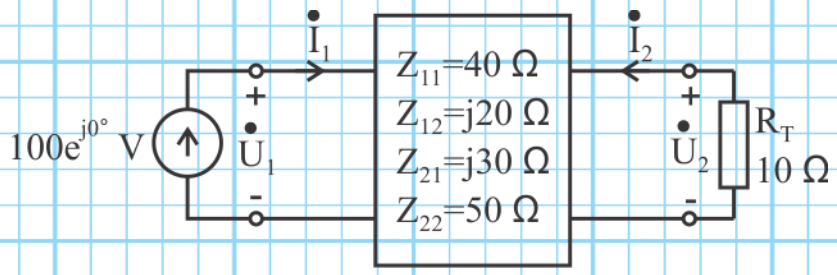
Забележете, че получените уравнения са в действителност уравненията на системата със Z параметрите. С други думи това е еквивалентна заместваща схема на четириполюсника. Тя е валидна за най-общият случай, когато четириполюсникът се характеризира с 4 независими параметъра.

В случай на взаимен четириполюсник, можем да използваме еквивалентна Т-образна схема:



За домашно: Докажете, че тази схема е еквивалентна.

Пример: За дадената верига да се определят токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, както и мощността, достигаща до товара R_T, ако източникът е дефиниран със своята комплексна амплитудна стойност.



Решение 1: Тъй като ни интересуват единствено токовете, можем директно да заместим в системата Z параметри това което знаем: $\dot{U}_1 = 100e^{j0}$ и $\dot{U}_2 = -R_T\dot{I}_2 = -10\dot{I}_2$:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 100 = 40\dot{I}_1 + j20\dot{I}_2 \\ -10\dot{I}_2 = j30\dot{I}_1 + 50\dot{I}_2 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} 5 = 2\dot{I}_1 + j\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = j2\dot{I}_2 \end{array} \right.$$

Заместваме второто уравнение в първото и получаваме изходния ток:

$$5 = j4\dot{I}_2 + j\dot{I}_2 \rightarrow \ \dot{I}_2 = -j = 1e^{-j90°}\ [A]$$

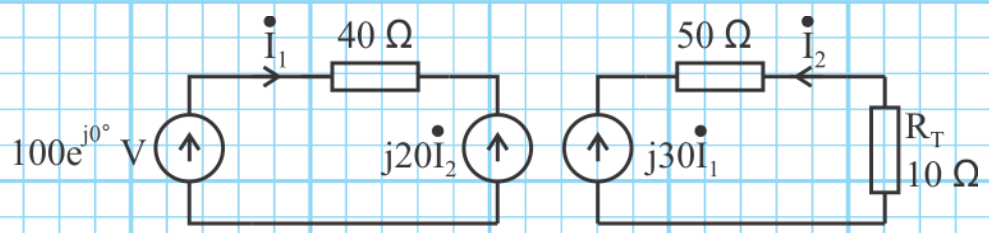
Входният ток е:

$$\dot{I}_1 = j2\dot{I}_2 = j2(-j) = 2\ [A]$$

Мощността, разсейвана в R_T, е:

$$P = \left(\frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}\right)^2 . R_T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 10 = 5\ [W]$$

Решение 2: Втори начин по който можем да решим тази задача, е чрез еквивалентна заместваща схема. Четириполюсникът се характеризира с 4 параметъра, така че ще използваме обобщената схема:



За схемата записваме уравнения по ВЗК:

$$\left| \begin{array}{l} 100 - j20\dot{I}_2 = 40\dot{I}_1 \\ -j30\dot{I}_1 = (50 + 10)\dot{I}_2 \end{array} \right.$$

Това е същата система, която получихме по първия метод, така че и решението и ще бъде същото.

Y параметри (параметри на проводимостта)

Вече дефинирахме Z параметрите на четириполюсник, но те не винаги съществуват. Например идеалният трансформатор не може да бъде описан със Z параметри. Нека да разгледаме четириполюсник, който се захранва от два източника на напрежение:

И тук можем да приложим принципа на наслагването и да определим токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, като сума въздействията на двата източника по отделно:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

В матрична форма системата е:

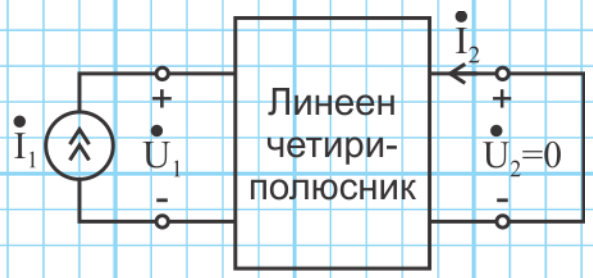
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

където матрицата $Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ съдържа параметрите на проводимостта в Сименси. Подобно на Z параметрите, четириполюсникът е взаимен при $Y_{12} = Y_{21}$.

Определяне на Y параметрите

За да определим Y параметрите, ще трябва да анализираме системата при две ситуации: $\dot{U}_2 = 0$ и $\dot{U}_1 = 0$.

Нека първо да разгледаме четириполюсника, ако го захраним с източник $\dot{I}_1$ на входа му, а изхода го даден на късо ($\dot{U}_2 = 0$):



Тогава уравненията от системата стават:

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 = Y_{11}\dot{U}_1 + 0$$

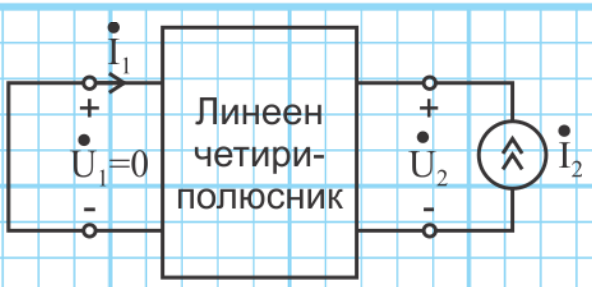
$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + 0$$

От тях можем да определим два от параметрите:

$$Y_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2 = 0}$$

$$Y_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2 = 0}$$

По аналогичен начин свързваме източник на ток $\dot{I}_2$ към изхода, а входа на четириполюсника окъсяваме ($\dot{U}_1 = 0$):



Уравненията стават:

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 = 0 + Y_{12}\dot{U}_2$$

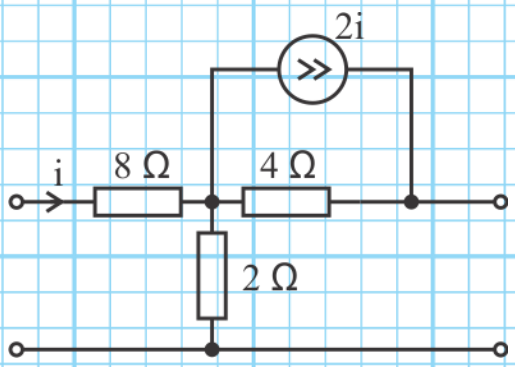
$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = 0 + Y_{22}\dot{U}_2$$

Следователно другите два параметъра са:

$$Y_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1 = 0}$$

$$Y_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1 = 0}$$

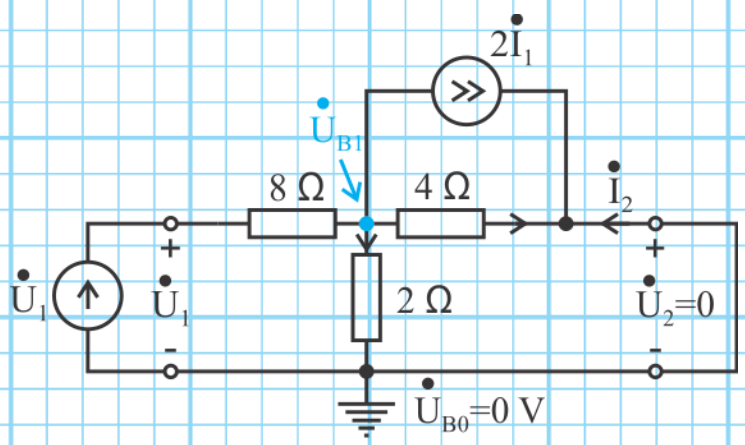
Пример: Да се определят Y параметрите на четириполюсника.



Системата с уравнения за Y параметрите е:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

Следователно трябва да я анализираме при $\dot{U}_2 = 0$ (късо съединение на изхода) и при $\dot{U}_1 = 0$ (късо съединение на входа). Нека да разгледаме първата ситуация, като анализираме схемата използвайки метода с възловите потенциали:



След даване на късо, веригата остава само с два възела. Заземяваме единия и записваме уравнение по ПЗК за другия:

$$\frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{B1} + \dot{U}_1}{8} = 2.\frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{B1} + \dot{U}_1}{8} + \frac{\dot{U}_{B1} - \dot{U}_{B0}}{4} + \frac{\dot{U}_{B1} - \dot{U}_{B0}}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{B1}}{8} = 2.\frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{B1}}{8} + \frac{\dot{U}_{B1}}{4} + \frac{\dot{U}_{B1}}{2}$$

$$\rightarrow -0{,}125\dot{U}_1 = \dot{U}_{B1}(0{,}125 - 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}5) \rightarrow \dot{U}_1 = -5\dot{U}_{B1}$$

Следователно токът $\dot{I}_1$ е:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{B1}}{8} = -0{,}75\dot{U}_{B1}$$

Можем да определим токът $\dot{I}_2$ от ПЗК:

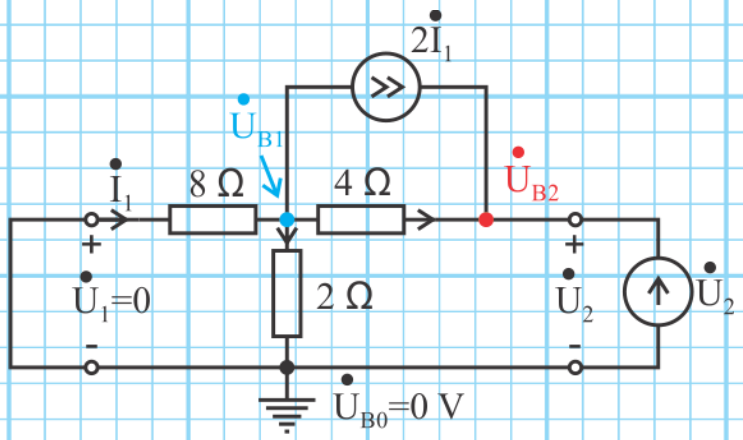
$$\dot{I}_2 + 2\dot{I}_1 + \frac{\dot{V}_{B1}}{4} = 0 \rightarrow \dot{I}_2 = 1{,}5\dot{V}_{B1} - 0{,}25\dot{V}_{B1} = 1{,}25\dot{V}_{B1}$$

Следователно два от Y параметрите са:

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{-0{,}75\dot{U}_{B1}}{-5\dot{U}_{B1}} = 0{,}15\ [S]$$

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1{,}25\dot{U}_{B1}}{-5\dot{U}_{B1}} = -0{,}25\ [S]$$

За да определим другите 2 параметъра, ще анализираме схемата при късо съединение на входа:



Схемата има 3 възела. Заземяваме единия ($\dot{U}_{B0} = 0$), а втория е известен: $\dot{U}_{B2} = \dot{U}_2$. Записваме едно уравнение по ПЗК за неизвестния възел:

$$\frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{B1}}{8} = 2\frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{B1}}{8} + \frac{\dot{U}_{B1} - \dot{U}_2}{4} + \frac{\dot{U}_{B1} - \dot{U}_{B0}}{2}$$

$$\frac{\dot{U}_2}{4} = \frac{\dot{U}_{B1}}{8} - 2\frac{\dot{U}_{B1}}{8} + \frac{\dot{U}_{B1}}{4} + \frac{\dot{U}_{B1}}{2} \quad \rightarrow \quad \dot{U}_2 = 2{,}5.\dot{U}_{B1}$$

Двата тока са:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{B1}}{8} = -\frac{\dot{U}_{B1}}{8}$$

$$-\frac{\dot{U}_{B1}}{4} + \frac{\dot{U}_{B1} - 2{,}5\dot{U}_{B1}}{4} + \dot{I}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{I}_2 = 0{,}625.\dot{U}_{B1}$$

Следователно другите два Y параметърса:

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = \frac{-\frac{\dot{U}_{B1}}{8}}{2{,}5\dot{U}_{B1}} = -0{,}05\ [S]$$

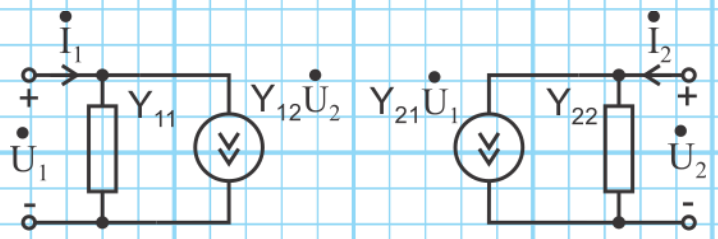
$$Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{0{,}625\dot{U}_{B1}}{2{,}5\dot{U}_{B1}} = 0{,}25\ [S]$$

Следователно Y параметрите на четириполюсника са:

$$Y = \begin{vmatrix} 0{,}15 & -0{,}05 \\ -0{,}25 & 0{,}25 \end{vmatrix}$$

Еквивалентна заместваща схема

Нека да разгледаме следната схема:



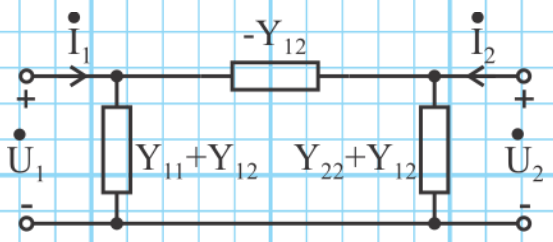
Двете уравнения по ПЗК са:

$$\dot{I}_1 = Y_{11}.\dot{U}_1 + Y_{12}.\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = Y_{21}.\dot{U}_1 + Y_{22}.\dot{U}_2$$

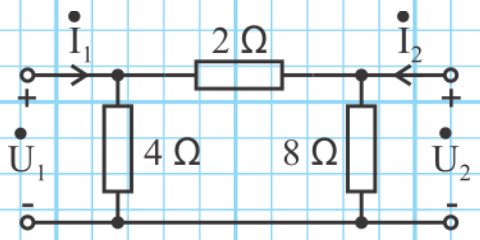
Очевидно е, че това са двете уравнения на Y параметрите. Тази заместваща схема може да се използва в най-общия случай, когато имаме 4 независими Y параметъра.

В случай на взаимен четириполюсник ($Y_{12} = Y_{21}$), може да се използва П-образна заместваща схема:



За домашно: Докажете, че тази схема е еквивалентна.

Пример: Да се определят Y параметрите на четириполюсника.



Тъй като това е П-образен четириполюсник, можем директно да определим неговите Y параметри:

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{2} = -0{,}5\ [S]$$

Другите два параметъра са:

$$Y_{11} + Y_{12} = \frac{1}{4} \rightarrow Y_{11} = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75\ [S]$$

$$Y_{22} + Y_{12} = \frac{1}{8} \rightarrow Y_{22} = 0{,}125 + 0{,}5 = 0{,}625\ [S]$$

Пълното решение е:

$$Y = \begin{vmatrix} 0{,}75 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}625 \end{vmatrix}$$

<u>H параметри (хибридни параметри)</u>

Z и Y параметрите не винаги съществуват, поради което са нужни и други методи за описване на четириполюсник. Трети вид параметри изразяват $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_2$ чрез $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_2$:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

Системата може да се запише в матрична форма:

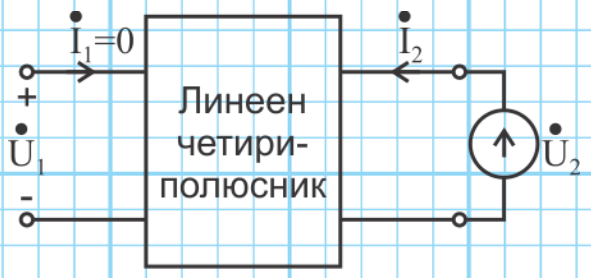
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

където матрицата $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ съдържа хибридните параметри на четириполюсника. Този набор от параметри е полезен при описване на някои електронни устройства като транзисторите, защото при тях е много по-удобно да се измерят H параметрите, отколкото Z или Y.

Определяне на H параметрите

За да определим хибридните параметри трябва да анализираме системата уравнения при $\dot{I}_1 = 0$ и при $\dot{U}_2 = 0$.

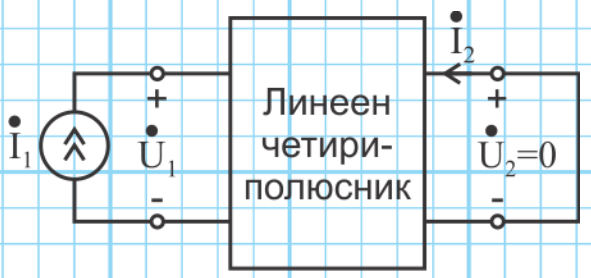
Нека първо да разгледаме четириполюсника при празен ход на входа му ($\dot{I}_1 = 0$):



$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 = 0 + H_{12}\dot{U}_2 \quad \rightarrow \quad H_{12} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_1 = 0}$$

$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 = 0 + H_{22}\dot{U}_2 \quad \rightarrow \quad H_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_1 = 0}$$

Другите два параметъра можем да определим при късо съединение на изхода на четириполюсника ($\dot{U}_2 = 0$):



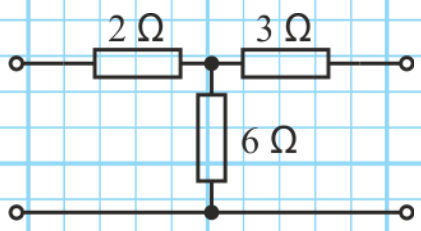
$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 = H_{11}\dot{I}_1 + 0 \quad \rightarrow \quad H_{11} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2 = 0}$$

$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + 0 \quad \rightarrow \quad H_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2 = 0}$$

Забележете, че H параметрите имат различна размерност:

- H_{11} е входният импеданс при късо съединение на изхода на четириполюсника, измерван в Омове $[\Omega]$;
- H_{12} е коефициентът на обратна връзка по напрежение при празен ход на входа на четириполюсника;
- H_{21} е коефициентът на предаване по ток при късо съединение на изхода;
- H_{22} е изходната проводимост при отворена верига на входа на четириполюсника, измерван в Сименси $[S]$.

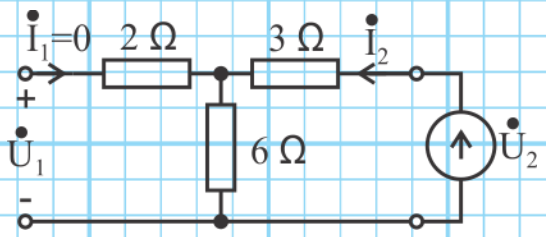
Пример: Да се определят H параметрите на четириполюсника.



Системата уравнения с H параметрите е:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

Нека първо да я анализираме при празен ход на входа на четириполюсника ($\dot{I}_1 = 0$):



Определяме тока I_2:

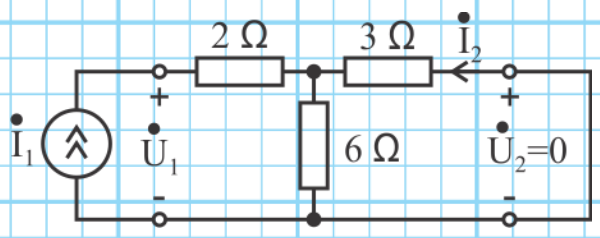
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{3+6} = \frac{\dot{U}_2}{9}$$

Тогава H параметрите са:

$$\dot{I}_2 = 0 + H_{22}\dot{U}_2 \rightarrow \quad H_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{\frac{\dot{U}_2}{9}}{\dot{U}_2} = 0{,}111\ [S]$$

$$\dot{U}_1 = 0 + H_{12}\dot{U}_2 \rightarrow \quad H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{6\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{6\frac{\dot{U}_2}{9}}{\dot{U}_2} = 0{,}667$$

След това анализираме схемата при късо съединение на изхода ($\dot{U}_2 = 0$):



Изразяваме $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_2$ чрез $\dot{I}_1$:

$$\dot{U}_1 = (2 + 3||6)\dot{I}_1 = 4\dot{I}_1$$

От ВЗК изразяваме $\dot{I}_2$:

$$\dot{U}_1 = 2\dot{I}_1 - 3\dot{I}_2 \rightarrow \quad 4\dot{I}_1 = 2\dot{I}_1 - 3\dot{I}_2 \rightarrow \quad \dot{I}_2 = -\frac{2}{3}\dot{I}_1$$

Следователно другите два H параметъра са:

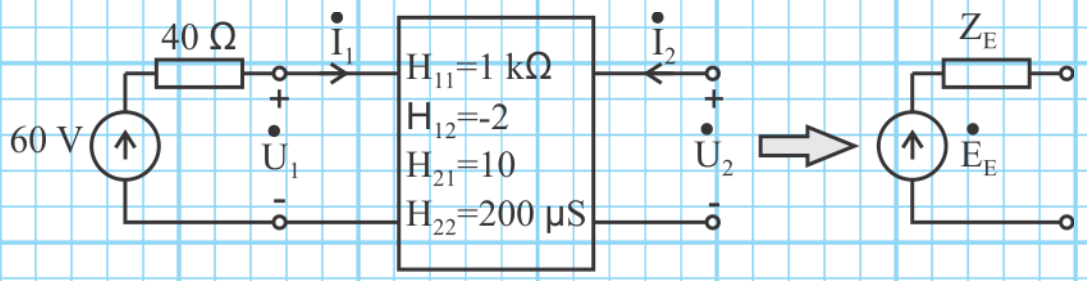
$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + 0 \rightarrow \quad H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{4\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = 4\ [\Omega]$$

$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + 0 \rightarrow \quad H_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{-\frac{2}{3}\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = -0{,}667$$

Да обобщим:

$$H = \begin{vmatrix} 4 & 0{,}667 \\ -0{,}667 & 0{,}111 \end{vmatrix}$$

<u>Пример:</u> За дадената схема да се определи еквивалентния генератор на напрежение (еквивалентна схема на Тевенен).



Нужно е да определим $\dot{E}_E$ и Z_E на еквивалентния генератор, което може да стане с:

$$\dot{E}_E = \dot{U}_{2ПХ}; \quad Z_E = \frac{\dot{U}_{2ПХ}}{-\dot{I}_{2КС}}$$

където $\dot{U}_{2ПХ}$ и $\dot{I}_{2КС}$ са съответно напрежението на празен ход и токът на късо съединение на изхода на четириполюсника.

Съществуват множество възможности да определим двете величини, но ние ще работим директно с H параметрите. Можем да запишем уравнение по ПЗК за входа на четириполюсника:

$$60 = 40\dot{I}_1 + \dot{U}_1 \rightarrow \quad \dot{U}_1 = 60 - 40\dot{I}_1$$

При празен ход на изхода на четириполюсника заместваме $\dot{I}_2 = 0$ и $\dot{U}_1 = 60 - 40\dot{I}_1$ в системата с H параметри:

$$\left|\begin{array}{l}\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2\end{array}\right. \quad => \quad \left|\begin{array}{l}60 - 40\dot{I}_1 = 1000\dot{I}_1 - 2\dot{U}_2 \\ 0 = 10\dot{I}_1 + 200.10^{-6}\dot{U}_2\end{array}\right.$$

От второто уравнение получаваме:

$$\dot{I}_1 = -\frac{200.10^{-6}}{10}\dot{U}_2 = -2 * 10^{-5}\dot{U}_2$$

и заместваме в първото:

$$60 = 1040\dot{I}_1 - 2\dot{U}_2 = -1040.2.10^{-5}\dot{U}_2 - 2\dot{U}_2$$

$$\rightarrow \quad \dot{U}_{2\text{ПХ}} = \dot{U}_2 = \frac{-60}{2{,}0208} = -29{,}69\ [V]$$

За да определим токът на късо съединение $\dot{I}_{2\text{КС}}$ на четириполюсника, ще заместим $\dot{U}_2 = 0$ и $\dot{U}_1 = 60 - 40\dot{I}_1$:

$$\left|\begin{array}{l}\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2\end{array}\right. \quad => \quad \left|\begin{array}{l}60 - 40\dot{I}_1 = 1000\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = 10\dot{I}_1\end{array}\right.$$

От второто уравнение изразяваме $\dot{I}_1 = 0{,}1\dot{I}_2$ и заместваме в първото:

$$60 = 1040\dot{I}_1 = 1040.0{,}1\dot{I}_2 \rightarrow \quad \dot{I}_{2\text{КС}} = \dot{I}_2 = \frac{60}{104} = 0{,}577\ [A]$$

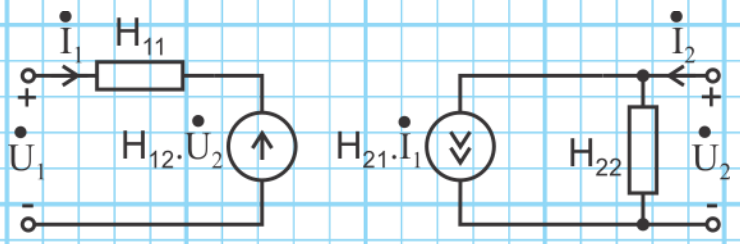
Следоватлено еквивалентният генератор на напрежение (източник на Тевенен) е:

$$E_E = \dot{U}_{2ПХ} = -29{,}69\ [V]$$

$$Z_E = \frac{\dot{U}_{2ПХ}}{-\dot{I}_{2КС}} = \frac{-29{,}69}{-0{,}577} = 51{,}46\ [\Omega]$$

Еквивалентна заместваща схема

Еквивалентната заместваща схема с хибридните параметри е:



За домашно: Докажете, че тази схема е еквивалентна.

***G* параметри (обратни хибридни параметри)**

Друг набор от параметри на четириполюсник са G параметрите. В случая зависимите променливи са $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_2$:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

Записано в матрична форма уравнението става:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

където матрицата $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ съдържа обратните хибридни параметри.

Определяне на G параметрите

G параметрите могат да бъдат определени, като анализираме системата им при $\dot{I}_2 = 0$ и $\dot{U}_1 = 0$.

Анализираме четириполюсника при празен хода на изхода му ($\dot{I}_2 = 0$) за да намерим първите два параметъра:

$$\dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 = G_{11}\dot{U}_1 + 0 \rightarrow G_{11} = -\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{I}_2 = 0}$$

$$\dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + 0 \rightarrow G_{21} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{I}_2 = 0}$$

Анализираме четириполюсника при късо съединение на входа му ($\dot{U}_1 = 0$), за да определим другите два:

$$\dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 = 0 + G_{12}\dot{I}_2 \rightarrow G_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_1 = 0}$$

$$\dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 = 0 + G_{22}\dot{I}_2 \rightarrow G_{22} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_1 = 0}$$

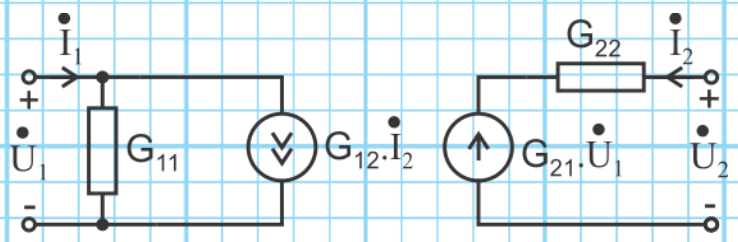
И G параметрите имат различна размерност:

- G_{11} е входната проводимост на четириполюсника при празен ход на изхода му в Сименси $[S]$;

- G_{12} е обратния коефициент на предаване по ток при късо съединение на входа на четириполюсника;
- G_{21} е коефициентът на предаване по напрежение на четириполюсника при празен ход на входа;
- G_{22} е изходното съпротивление на четириполюсника при късо съединение на входа му в Омове $[\Omega]$;

Еквивалентна заместваща схема

Еквивалентната заместваща схема на четириполюсник с неговите G параметри е:



***A* параметри (предавателни параметри)**

Остава да дефинираме още два типа параметри, първият от които са така наречените A параметри (предавателни параметри), наричани още ABCD параметри. При тях зависимите променливи са $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$. Тъй като идеята за предаването предполага, че токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ са насочени в една и съща посока, поради което ще използваме $\dot{I}_2$ със знак минус и противоположна посока:

Това се прави по простата причина, че когато има навързани каскадно множество четириполюсници, логично е да мислим за тока $\dot{I}_2$ като за излизащ от четириполюсника.

Системата с A параметрите е:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 \end{cases}$$

Системата в матрична форма е:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

където матрицата $A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ съдържа предавателните параметри. Съществуват много литературни източници, в които вместо $ABCD$ се използва $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$.

Предавателните параметри са удобни при анализ на предавателни линии, като кабели, телефонни линии, високочестотни мрежи, радари и др.

Определяне на A параметрите

За да определим предавателните параметри, е нужно да анализираме системата при $\dot{U}_2 = 0$ и $\dot{I}_2 = 0$.

При късо съединение на изхода на четириполюсника ($\dot{U}_2 = 0$) системата добива следния вид:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 = 0 - B\dot{I}_2 \rightarrow B = -\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2 = 0}$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 = 0 - D\dot{I}_2 \rightarrow D = -\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2 = 0}$$

Другите два параметъра определяме при празен ход на изхода на четириполюсника ($\dot{I}_2 = 0$):

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 = A\dot{U}_2 \quad => \quad A = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2 = 0}$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 = C\dot{U}_2 \quad => \quad C = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2 = 0}$$

Забележете, че A параметрите също имат различна размерност и значение:

- A е коефициентът на обратна връзка по напрежение при празен ход на изхода на четириполюсника;
- B има размерност на съпротивление в Омове $[\Omega]$;
- C има размерност на проводимост в Сименси $[S]$;
- D е коефициентът на обратна връзка по ток при късо съединение на изхода на четириполюсника.

За взаимен четириполюсник може да се докаже, че:

$$AD - BC = 1$$

***B* параметри (обратни предавателни параметри)**

Последните параметри са така наречените B параметри, които са противоположни на A параметрите:

$$\left|\begin{array}{l}\dot{U}_2 = a\dot{U}_1 - b\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = c\dot{U}_1 - d\dot{I}_1\end{array}\right.$$

В матрична форма записваме:

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1 \\ -\dot{I}_1\end{bmatrix} = B\begin{bmatrix}\dot{U}_1 \\ -\dot{I}_1\end{bmatrix}$$

където матрицата $B = \begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ съдържа обратните предавателни параметри на четириполюсника.

Определяне на *B* параметрите

B параметрите се определят по аналогичен начин, съответно при късо съединение ($\dot{U}_1 = 0$) и празен ход ($\dot{I}_1 = 0$) на входа:

$$\mathrm{a} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{I}_1 = 0}$$

$$\mathrm{b} = -\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_1 = 0}$$

$$\mathrm{c} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{I}_1 = 0}$$

$$\mathrm{d} = -\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_1 = 0}$$

За взаимен четириполюсник може да се докаже, че:

$$ad - bc = 1$$

<u>Връзки между параметрите</u>

Знаейки кои да е параметри на четириполюсник, можем да изразим всички останали (ако съществуват). Например нека разполагаме със Z параметрите на четириполюсник:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

Лесно можем да получим Y параметрите като определим обратната матрица:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = Z^{-1} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

Детерминантата и адюнгираните количества на матрицата Z са:

$$\Delta_Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}$$

Тогава Y параметрите са:

$$Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}}{\Delta_Z}=\begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta_Z} \end{bmatrix}$$

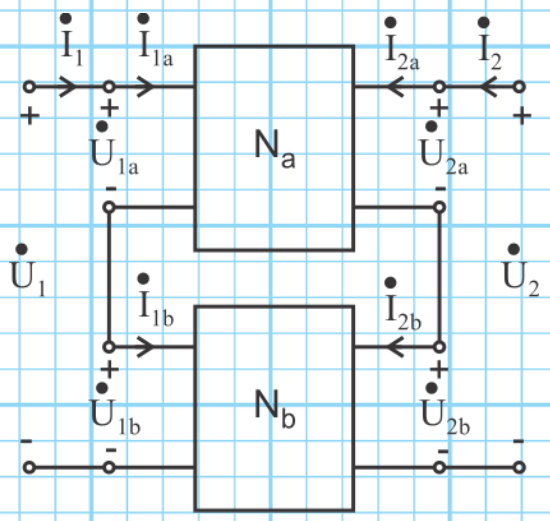
Всички възможни преобразувания от едни параметри в други, е представено в следващата таблица:

	Z	Y	H	G	A	B
Z	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{\Delta_Y} & -\frac{Y_{12}}{\Delta_Y} \\ -\frac{Y_{21}}{\Delta_Y} & \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ -\frac{H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{G_{11}} & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ \frac{G_{21}}{G_{11}} & \frac{\Delta_G}{G_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta_A}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{d}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{\Delta_B}{c} & \frac{a}{c} \end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta_Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{H_{11}} & -\frac{H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\Delta_H}{H_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_G}{G_{22}} & \frac{G_{12}}{G_{22}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & \frac{1}{G_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta_A}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a}{b} & -\frac{1}{b} \\ -\frac{\Delta_B}{b} & \frac{d}{b} \end{bmatrix}$
H	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{Y_{11}} & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta_Y}{Y_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{G_{22}}{\Delta_G} & -\frac{G_{12}}{\Delta_G} \\ -\frac{G_{21}}{\Delta_G} & \frac{G_{11}}{\Delta_G} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta_A}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{\Delta_B}{a} & \frac{c}{a} \end{bmatrix}$
G	$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{11}} & -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_Y}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{H_{22}}{\Delta_H} & -\frac{H_{12}}{\Delta_H} \\ -\frac{H_{21}}{\Delta_H} & \frac{H_{11}}{\Delta_H} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta_A}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{c}{d} & -\frac{1}{d} \\ \frac{\Delta_B}{d} & -\frac{b}{d} \end{bmatrix}$
A	$\begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\frac{1}{Y_{21}} \\ -\frac{\Delta_Y}{Y_{21}} & -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta_H}{H_{21}} & -\frac{H_{11}}{H_{21}} \\ -\frac{H_{22}}{H_{21}} & -\frac{1}{H_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{G_{21}} & \frac{G_{22}}{G_{21}} \\ \frac{G_{11}}{G_{21}} & \frac{\Delta_G}{G_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta_B} & \frac{b}{\Delta_B} \\ \frac{c}{\Delta_B} & \frac{a}{\Delta_B} \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{Z_{12}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{12}} \\ \frac{1}{Z_{12}} & \frac{Z_{11}}{Z_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{Y_{11}}{Y_{12}} & -\frac{1}{Y_{12}} \\ -\frac{\Delta_Y}{Y_{12}} & -\frac{Y_{22}}{Y_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{H_{12}} & \frac{H_{11}}{H_{12}} \\ \frac{H_{22}}{H_{12}} & \frac{\Delta_H}{H_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta_G}{G_{12}} & -\frac{G_{22}}{G_{12}} \\ -\frac{G_{11}}{G_{12}} & -\frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D}{\Delta_A} & \frac{B}{\Delta_A} \\ \frac{C}{\Delta_A} & \frac{A}{\Delta_A} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Свързване на четириполюсници

Последователно съединение на четириполюсници

Нека два четириполюсника са свързани по следния начин:



Такова свързване се нарича последователно. Нека системите със Z параметрите на двата четириполюсника са:

$$\begin{cases} \dot{U}_{1a} = Z_{11a}\dot{I}_{1a} + Z_{12a}\dot{I}_{2a} \\ \dot{U}_{2a} = Z_{21a}\dot{I}_{1a} + Z_{22a}\dot{I}_{2a} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dot{U}_{1b} = Z_{11b}\dot{I}_{1b} + Z_{12b}\dot{I}_{2b} \\ \dot{U}_{2b} = Z_{21b}\dot{I}_{1b} + Z_{22b}\dot{I}_{2b} \end{cases}$$

От схемата се вижда, че:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b} \quad \text{и} \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} = \dot{I}_{2b}$$

Можем да запишем две уравнения по ВЗК за входа и изхода на четириполюсниците:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1b} \quad \text{и} \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2b}$$

От там получаваме:

$$\dot{U}_1 = Z_{11a}\dot{I}_{1a} + Z_{12a}\dot{I}_{2a} + Z_{11b}\dot{I}_{1b} + Z_{12b}\dot{I}_{2b} = \\ = (Z_{11a} + Z_{11b})\dot{I}_1 + (Z_{12a} + Z_{12b})\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21a}\dot{I}_{1a} + Z_{22a}\dot{I}_{2a} + Z_{21b}\dot{I}_{1b} + Z_{22b}\dot{I}_{2b} = \\ = (Z_{21a} + Z_{21b})\dot{I}_1 + (Z_{22a} + Z_{22b})\dot{I}_2$$

Следователно Z параметрите на цялото съединение са:

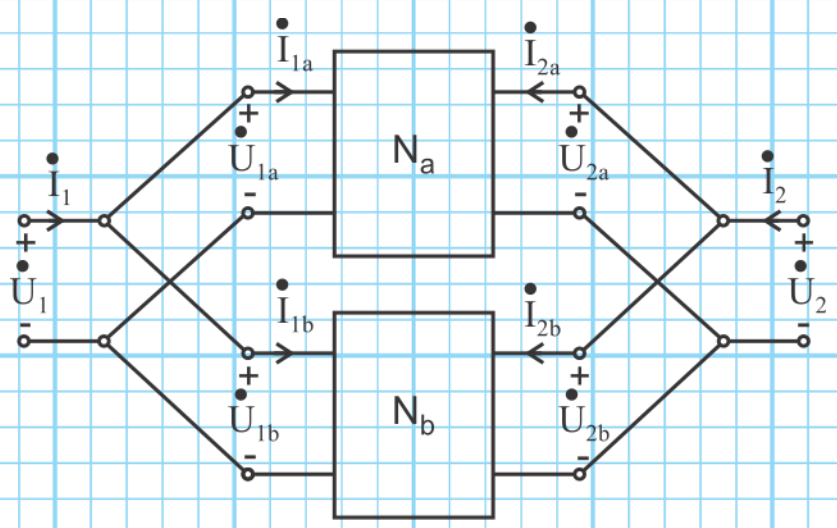
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11a} + Z_{11b} & Z_{12a} + Z_{12b} \\ Z_{21a} + Z_{21b} & Z_{22a} + Z_{22b} \end{bmatrix}$$

С други думи когато два четириполюсника са свързани последователно, еквивалентните Z параметри на цялото съединение могат да се определят чрез Z параметрите на двата четириполюсника:

$$Z = Z_a + Z_b$$

<u>Паралелно съединение на четириполюсници</u>

Нека два четириполюсника са свързани по следния начин:



Такова съединение се нарича паралелно. Нека двата четириполюсника са дефинирани с техните Y параметри:

$$\begin{cases} \dot{I}_{1a} = Y_{11a}\dot{U}_{1a} + Y_{12a}\dot{U}_{2a} \\ \dot{I}_{2a} = Y_{21a}\dot{U}_{1a} + Y_{22a}\dot{U}_{2a} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dot{I}_{1b} = Y_{11b}\dot{U}_{1b} + Y_{12b}\dot{U}_{2b} \\ \dot{I}_{2b} = Y_{21b}\dot{U}_{1b} + Y_{22b}\dot{U}_{2b} \end{cases}$$

От фигурата се вижда, че:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1b} \quad \text{и} \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2b}$$

Също така можем да запишем две уравнения по ПЗК за входа и изхода на веригата:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} + \dot{I}_{2b}$$

Следователно получаваме:

$$\dot{I}_1 = Y_{11a}\dot{U}_{1a} + Y_{12a}\dot{U}_{2a} + Y_{11b}\dot{U}_{1b} + Y_{12b}\dot{U}_{2b} = \\ = (Y_{11a} + Y_{11b})\dot{U}_1 + (Y_{12a} + Y_{12b})\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = Y_{21a}\dot{U}_{1a} + Y_{22a}\dot{U}_{2a} + Y_{21b}\dot{U}_{1b} + Y_{22b}\dot{U}_{2b} = \\ = (Y_{21a} + Y_{21b})\dot{U}_1 + (Y_{22a} + Y_{22b})\dot{U}_2$$

Следователно общите Y параметри на цялата верига са:

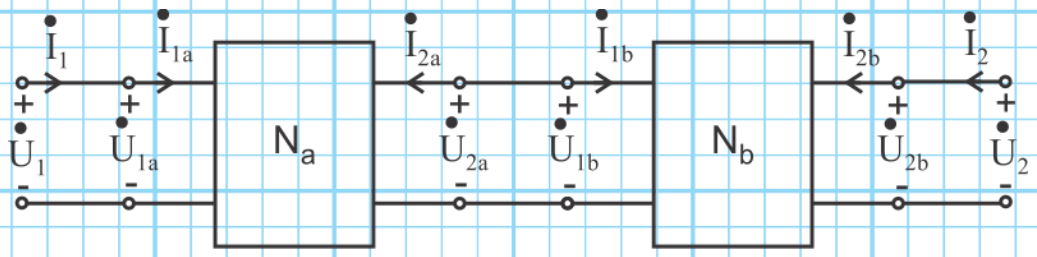
$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11a} + Y_{11b} & Y_{12a} + Y_{12b} \\ Y_{21a} + Y_{21b} & Y_{22a} + Y_{22b} \end{bmatrix}$$

С други думи Y параметрите на паралелно съединение на четириполюсници може да се определи чрез:

$$Y = Y_a + Y_b$$

<u>Каскадно (верижно) съединение на четириполюсници</u>

Следното съединение на четириполюсници се нарича каскадно (или верижно):



Нека двата четириполюсника са зададени с A параметрите си:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ -\dot{I}_{2a} \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ -\dot{I}_{2b} \end{bmatrix}$$

От схемата се вижда, че изходът на първия четириполюсник е вход за втория, така че можем да запишем:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ -\dot{I}_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ -\dot{I}_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

Следователно можем да заместим горните уравнения в матрицата на първото уравнение:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ -\dot{I}_{2a} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix}$$

След това ще заместим втората матрица в горното уравнение:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ -\dot{I}_{2b} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

Следователно A параметрите на цялата верига са:

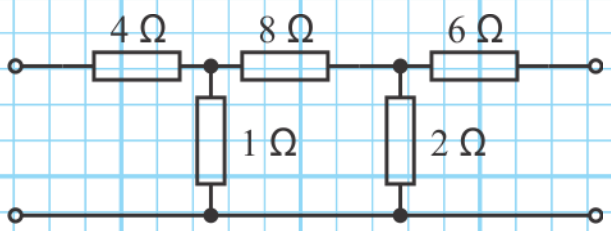
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix}$$

С други думи предавателните параметри на верижно свързани четириполюсници могат да се определят с:

$$A = A_a . A_b$$

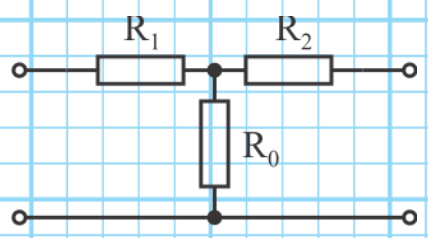
Важно: Умножението на матриците трябва да бъде извършено по реда, по който те са свързани.

Пример: Да се определят A параметрите на веригата.



Ще определим A параметрите като представим четириполюсника, като два каскадно свързани Т-образни четириполюсници.

Ще използваме следните зависимости за A параметрите на Т-образен четириполюсник:

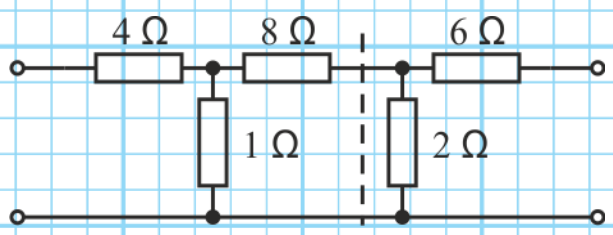


$$A = 1 + \frac{R_1}{R_0} \qquad B = R_2 + \frac{R_1(R_2 + R_0)}{R_0}$$

$$C = \frac{1}{R_0} \qquad D = 1 + \frac{R_2}{R_0}$$

За домашно: Можете ли да докажете тези зависимости?

Разглеждаме дадената схема по следния начин:



A параметрите на първия Т-образен четириполюсник са:

$$A = 1 + \frac{4}{1} = 5 \qquad B = 8 + \frac{4(1+8)}{1} = 44\ [\Omega]$$

$$C = \frac{1}{1} = 1\ [S] \qquad D = 1 + \frac{8}{1} = 9$$

В матрична форма:

$$A_a = \begin{bmatrix} 5 & 44 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

За втория верижно-свързан четириполюсник знаем, че $R_1 = 0$ така че A параметрите му са:

$$A = 1 \qquad B = 6\ [\Omega]$$

$$C = \frac{1}{2} = 0{,}5\ [S] \qquad D = 1 + \frac{6}{2} = 4$$

В матрична форма:

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0{,}5 & 4 \end{bmatrix}$$

Следователно A параметрите на цялото съединение са:

$$A = A_a . A_b = \begin{bmatrix} 5 & 44 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0{,}5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1 + 44.0{,}5 & 5.6 + 44.4 \\ 1.1 + 9.0{,}5 & 1.6 + 9.4 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 27 & 206 \\ 5{,}5 & 42 \end{bmatrix}$$

<u>Други съединения на четириполюсници</u>

Съществуват и хибридни съединения (последователно-паралелно и паралелно-последователно), при което съответно се използват H и G параметрите:

- Последователно-паралелно съединение:

$$H = H_a + H_b$$

- Паралелно-последователно съединение

$$G = G_a + G_b$$

Приложения на теорията за четириполюсниците

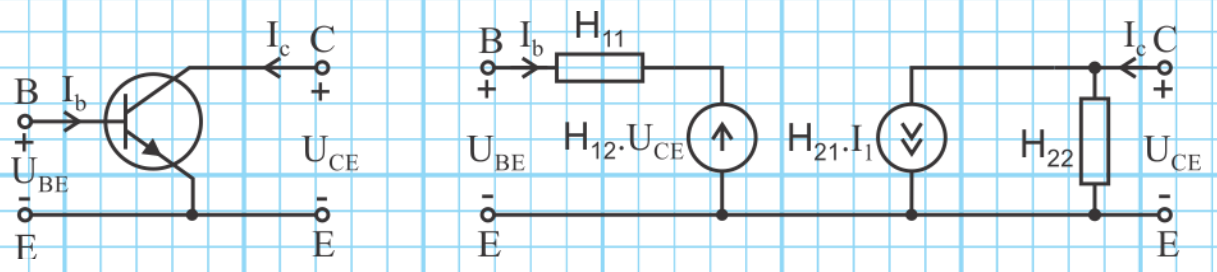
Вече видяхте, че съществуват 6 вида параметри на четириполюсници, с които могат да се опишат различни устройства. В този раздел ще разгледаме две важни приложения на четириполюсниците: транзисторните схеми и проектиране на верижни схеми.

Транзисторни схеми

В транзисторните схеми най-удобни са H параметрите, защото могат да бъдат лесно установени експериментално (измерени), и често са дадени в спецификацията на производителя. H параметрите на транзисторите имат специфично значение:

- H_{11} е входното съпротивление при късо съединение на изхода на за променливата съставка на напрежението;
- H_{12} е коефициентът на обратна връзка по напрежение при отворена входна верига за променлив ток;
- H_{21} е коефициентът на усилване по ток при късо съединение на изхода за променливата съставка на напрежението;
- H_{22} е изходната проводимост при отворена входна верига за променлив ток.

Следващата схема показва еквивалентната заместваща схема на транзисторен усилвател с H параметрите му:



Проектиране на верижни схеми

Очаквайте скоро.

Анализ на натоварени четириполюсници

Характеристични параметри на четириполюсници